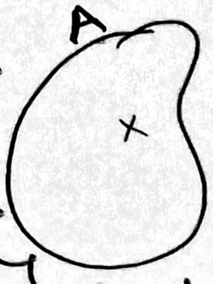
Διάλεξη 1η

08/11/2018.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Υπενθύμιση: Δίνεται τοπολογία $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ορίζεται η επαγόμενη τοπολογία στο σύνολο A ως εξής:



Το $X \subseteq A$ καλείται **ανοιχτό** στο A $\iff$ $X = A \cap V$, όπου V είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^n$.

Συνεχείς απεικονίσεις:

Ορισμός: Μια απεικόνιση $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ καλείται **συνεχής** αν-ν $\forall$ ανοιχτό V του $\mathbb{R}^m$ το $f^{-1}(V)$ είναι στο A.

Ορισμός: Μια απεικόνιση $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to B \subseteq \mathbb{R}^m$ καλείται **ομοιομορφισμός** αν-ν (i) f είναι συνεχής και (ii) είναι 1-1 και επί και $f^{-1}: B \to A$ συνεχής.

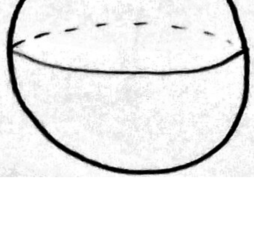
Ορισμός: Το $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **ομοιομορφικό** με το $B \subseteq \mathbb{R}^m$ αν-ν υπάρχει ομοιομορφισμός $f: A \to B$.

π.χ.

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1\}, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0$$

S^2



E

$f: S^2 \to E$

$f(x,y,z) = (\alpha x, \beta y, \gamma z)$

Διαφορίσιμες απεικονίσεις:

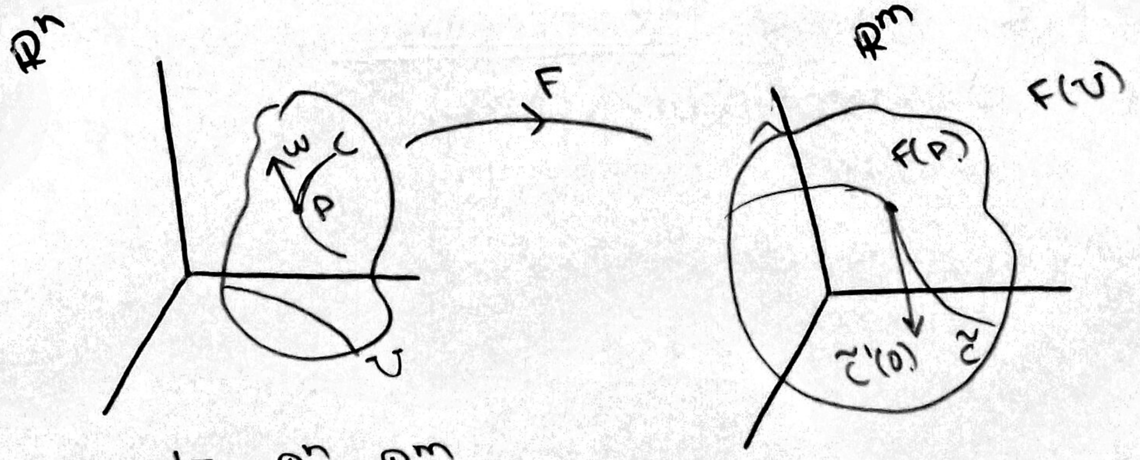
Ορισμός: Έστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, U ανοιχτό του $\mathbb{R}^n$ και $P_0 \in U$. Η f καλείται διαφορίσιμη στο P_0 αν-ν $\exists$ γραμμική απεικόνιση $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε

$$\lim_{P \to P_0} \frac{F(P) - F(P_0) - L(P - P_0)}{\|P - P_0\|} = 0$$

Η L είναι μοναδική και καλείται διαφορικό της F στο σημείο P_0 και συμβολίζεται με $dF_{P_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

(*) Ο πίνακας του dF_{P_0} ως προς τις συνήθεις βάσεις του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$ είναι ο εξής: $F(P) = (f_1(P), \dots, f_m(P))$ με $f_i: U \to \mathbb{R}$ είναι οι καλούμενες συναρτήσεις συντεταγμένων της F.

$$\begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(P) & \cdots & \frac{df_m}{dx_n}(P) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{df_m}{dx_1}(P) & \cdots & \frac{df_m}{dx_n}(P) \end{bmatrix}, \quad P = (x_1, \dots, x_n)$$



$dF_P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Θεωρώ $\omega \in \mathbb{R}^n$ και καμπύλη $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ τ.ω $c(0) = P$, $c'(0) = \omega$. Θεωρώ την καμπύλη $\tilde{c}: (-\varepsilon, \varepsilon) \to F(U)$, $\tilde{c} = F \circ c$

$\tilde{c}(0) = F(c(0)) = F(P)$, $\tilde{c}'(0) = dF_P(\omega)$

$T_p\mathbb{R}^n$ = το σύνολο όλων των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ με αφετηρία το P. Είναι διανυσματικός χώρος με τον $\mathbb{R}^n$.

$$dF_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_{F(p)}\mathbb{R}^m$$

και το $T_p\mathbb{R}^n$ = καλείται εφαπτόμενος χώρος του $\mathbb{R}^n$ στο P.

Ορισμός: Μια απεικόνιση $F: U\subset\mathbb{R}^n \to V\subset\mathbb{R}^m$, όπου U, V είναι ανοιχτά, καλείται διαφορομορφισμός αν-ν

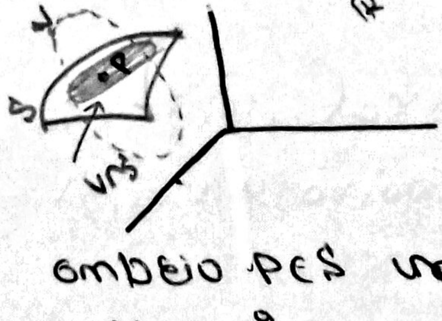
(i) F διαφορίσιμη, 1-1, επί και

(ii) Η $F^{-1}: V\subset\mathbb{R}^m \to U\subset\mathbb{R}^n$ διαφορίσιμη

Θεώρημα: Έστω $F: U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ διαφορίσιμη C^1 απεικόνιση. Αν για το σημείο $P\in U$ το διαφορικό $dF_P : T_P\mathbb{R}^n \to T_{F(P)}\mathbb{R}^n$ αντιστρέφεται, τότε $\exists$ περιοχή U_0 τ.ω P με $U_0\subseteq U$ και περιοχή V_0 του F(P) ώστε ο περιορισμός $F|_{U_0} : U_0 \to V_0$ να είναι 1-1, επί και η $(F|_{U_0})^{-1}$ είναι διαφορίσιμη (C^1)

Κανονικές επιφάνειες:

Ορισμός: Καλείται κανονική επιφάνεια στο $\mathbb{R}^3$ κάθε υποσύνολο $S\subseteq\mathbb{R}^3$ το οποίο πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:



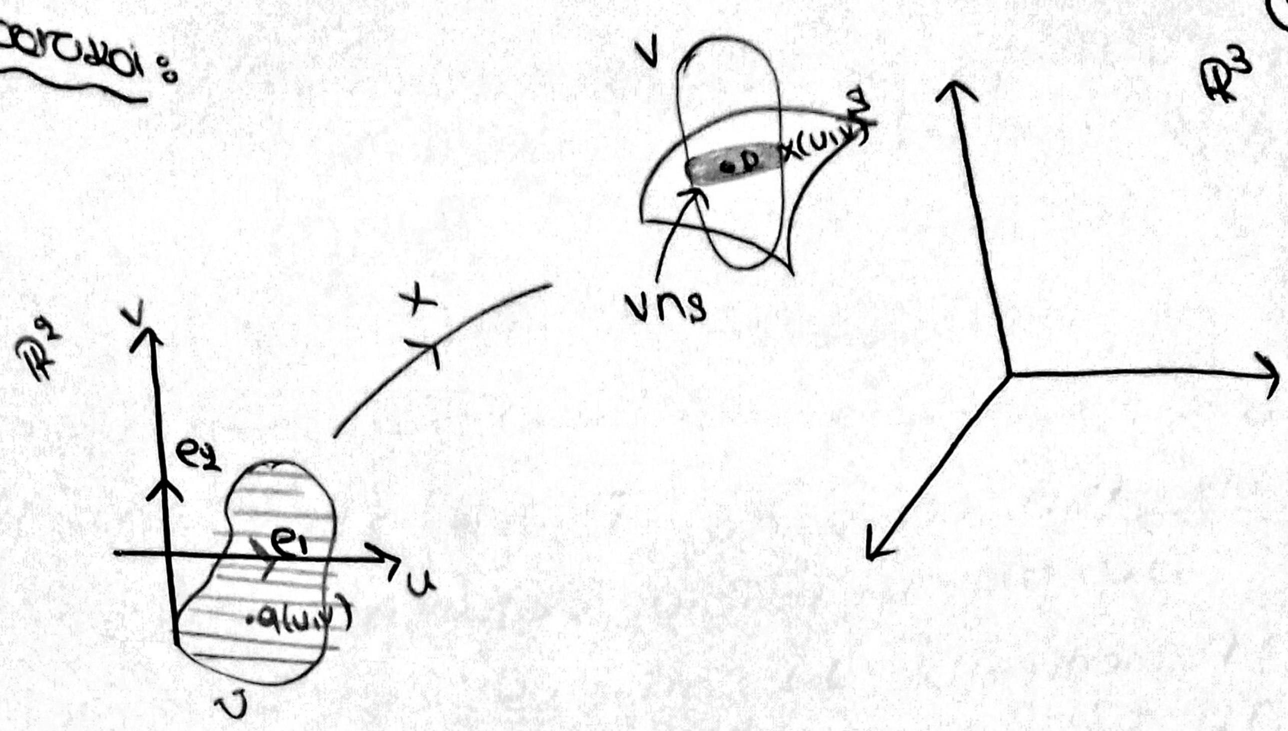
i) Για κάθε σημείο $P\in S$ υπάρχει περιοχή V του P στο $\mathbb{R}^3$ και απεικόνιση $X: U\subset\mathbb{R}^2 \to V\cap S$, επί, με $U\subset\mathbb{R}^2$ η οποία πληροί:

α) Η X είναι λεία, δηλαδή $X(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$

β) Η $X: U\subset\mathbb{R}^2 \to V\cap S$ είναι ομοιομορφισμός.

γ) $\forall q\in U$, το διαφορικό $dX_q\, T_q\mathbb{R}^2 \to T_{X(q)}\mathbb{R}^3$ είναι 1-1.

Σχηματικά:



<u>Ορολογία</u>: ▶ Κάθε απεικόνιση X, καλείται <u>σύστημα συντεταγμένων</u> της S (ή παραμετρική)

▶ $V \cap S = X(U)$ καλείται <u>περιοχή συντεταγμένων</u>

▶ Τα u, v καλούνται <u>παράμετροι</u> του συστήματος συντεταγμένων X.

▶ Το ζεύγος (u,v) θα το λέμε <u>συντεταγμένες</u> του σημείου $X(u,v)$

(*) Το dX_q είναι 1-1 $\Leftrightarrow$ $dX_q(e_1), dX_q(e_2)$ είναι <u>γραμμ. ανεξάρτητα.</u>

Για $q=(u_0,v_0)$: $dX_q(e_1) = dX_q(c_1'(0)) = (X \circ c_1)'(0) = X_u(u_0,v_0)$

αφού : $c_1(t) = (u_0,v_0) + t(1,0) = (u_0+t, v_0)$

$X \circ c_1(t) = X(u_0+t, v_0)$

Ομοίως : $dX_q(e_2) = (X \circ c_2)'(0) = X_v(u_0,v_0)$

Οπότε το dX_q είναι 1-1 $\Leftrightarrow$ $dX_q(e_1), dX_q(e_2)$ είναι γρ. αν.

$\Leftrightarrow$ $X_u(u,v), X_v(u,v)$ είναι <u>γραμμ. ανεξ. $\forall (u,v) \in U$</u>

$$\Leftrightarrow X_u \times X_v(u,v) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, -\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$$

Παραδείγματα κανονικών επιφανειών:

(1) Κάθε ανοιχτό υποσύνολο κανονικής επιφάνειας είναι επίσης κανονική επιφάνεια.

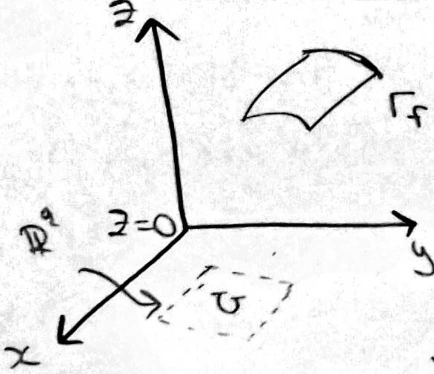
(2) Αν S είναι κανονική επιφάνεια και $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ τότε $\tilde{S} = T(S)$ είναι επίσης κανονική επιφάνεια.

$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S$, $\tilde{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \tilde{V} \cap \tilde{S}$, $\tilde{X} = T \circ X$

$$\tilde{V} = T(V), \quad d\tilde{X}_q = d(T \circ X)_q = dT_{X(q)} \circ dX_q = A \circ dX_q$$

είναι 1-1 //

(3) **Επιφανειακά γραφήματα:** Θεωρώ $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, λεία.



$\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in U\}$ είναι κανονική επιφάνεια.

Θεωρώ την $X : U \to V \cap \Gamma_f$, $V = \mathbb{R}^3$

$X(u,v) = (u,v,f(u,v))$ είναι λεία

$X(u_1,v_1) = X(u_2,v_2) \Longleftrightarrow (u_1,v_1) = (u_2,v_2)$. Άρα X είναι 1-1 και ότι

Πρέπει να βρω την αντιστροφή

$X^{-1} : \Gamma_f \to U$, $X^{-1}(x,y,z) = (u,v)$, $(x,y,z) \in \Gamma_f$

$\Longleftrightarrow X(u,v) = (x,y,z) \Longleftrightarrow (u,v,f(u,v)) = (x,y,z) \Rightarrow u = x,\ y = v$

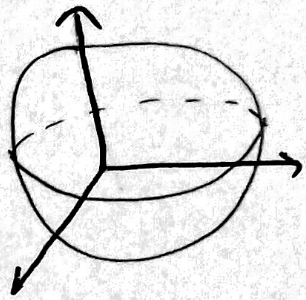
Άρα $X^{-1}(x,y,z) = (x,y) = (x,y,0)$ είναι προβολή στο xy-επίπεδο

$X_u = (1, 0, f_u)$ <u>και</u> $X_v = (0, 1, f_v)$

$X_u \times X_v = \ldots \neq (0,0)$

<u>Συμπέρασμα</u>: Τα γραφήματα είναι κανονικές επιφάνειες και καλύπτονται από ένα σύστημα συντεταγμένων.

(4) $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$



$x^2+y^2+z^2=1 \Leftrightarrow$

$z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$

Ορίζω $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2<1\}$

$X_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \to V_1 \cap S^2,\ X_1(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}),\ V_1 = \{(x,y,z) \mid z>0\}$

$X_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \to V_2 \cap S^2,\ X_2(u,v) = (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2}),\ V_2 = \{(x,y,z) \mid z<0\}$

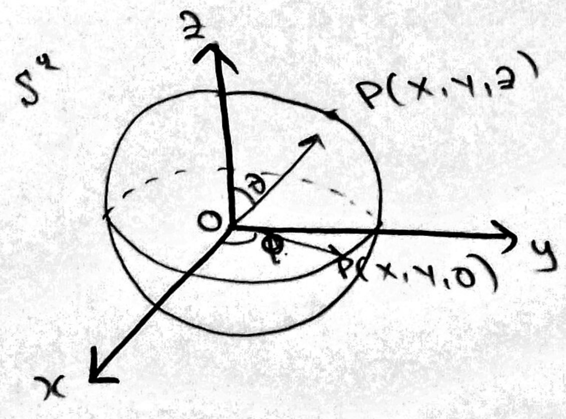
$X_3 : U \subset \mathbb{R}^2 \to V_3 \cap S^2,\ X_3(u,v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v),\ V_3 = \{(x,y,z) \mid y>0\}$

$X_4 : U \subset \mathbb{R}^2 \to V_4 \cap S^2,\ X_4(u,v) = (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v),\ V_4 = \{(x,y,z) \mid y<0\}$

$X_5 : U \subset \mathbb{R}^2 \to V_5 \cap S^2,\ X_5(u,v) = (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v),\ V_5 = \{(x,y,z) \mid x>0\}$

$X_6 : U \subset \mathbb{R}^2 \to V_6 \cap S^2,\ X_6(u,v) = (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v),\ V_6 = \{(x,y,z) \mid x<0\}$

$S^2 = \bigcup_{i=1}^{6} X_i(U) \Rightarrow S^2$ είναι <u>κανονική επιφάνεια</u>



$x = \cos\phi \, \|\vec{OP'}\| = \cos\phi \sin\theta$

$y = \sin\phi \, \|\vec{OP'}\| = \sin\phi \sin\theta$

$z = \cos\theta$

Ορίζω την $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S$

$X(u,\theta) = (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta)$

$U = \{(\phi,\theta) / 0 < \phi < 2\pi, 0 < \theta < \pi\} = (0,2\pi) \times (0,\pi)$ ανοιχτό στο $\mathbb{R}^2$

$V = \mathbb{R}^3 \setminus C$, $C = \{(x,y,z) \in S^2 \mid y = 0, x \geq 0\}$

$\| X_\phi \times X_\theta \|^2 = \dots > 0$

~o~o~o~o~o

▶ Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ λεία.

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ καλείται κρίσιμο σημείο της f <u>αν-ν</u>
$df_{P_0} = 0 \Leftrightarrow f_x(P_0) = f_y(P_0) = f_z(P_0) = 0$

(Α)* <u>Θεώρημα</u>: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ λεία και $a \in f(U)$. Αν το σύνολο $f^{-1}(a)$ <u>ΔΕΝ</u> περιέχει κανένα κρίσιμο σημείο της f, τότε είναι κανονική επιφάνεια.

<u>Π.χ</u>

(1) $S^2(R) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$

Ορίζω την συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$

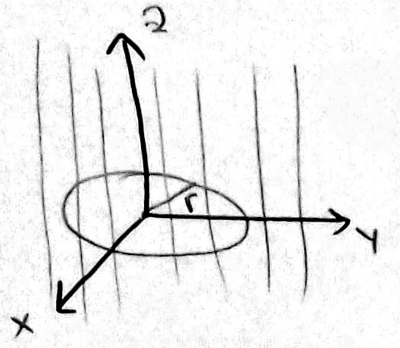
Έχω $S^2(R) = f^{-1}(0)$

Αναζητώ τα κρίσιμα σημεία της f, λύνοντας το σύστημα $f_x = f_y = f_z = 0 \Leftrightarrow 2x = 2y = 2z = 0$

Μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0,0) \notin f^{-1}(0)$

$\Rightarrow S^2(R)$ είναι κανονική επιφάνεια.

(2)



$S: \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=r^2\}$

$S=f^{-1}(0)$

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$f(x,y,z)=x^2+y^2-r^2$

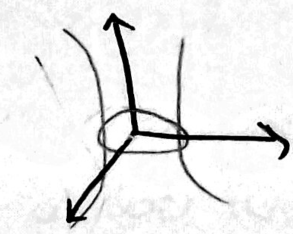
Τα κρίσιμα σημεία της f είναι:

$f_x=f_y=f_z=0 \Leftrightarrow 2x=2y=0.$

Το σύνολο των κρίσιμων σημείων είναι:

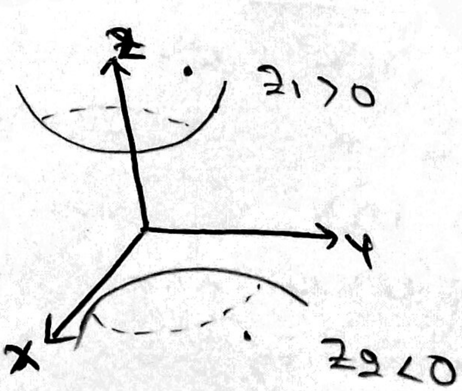
$\{(0,0,z)\mid z\in\mathbb{R}\}\cap f^{-1}(0)=\emptyset.$

(3) 2ος άσκηση: Νδο $S: x^2+y^2-z^2=r^2$ είναι κανονική επιφάνεια



(*) Μια κανονική επιφάνεια είναι συνεκτική αν-ν είναι τροχιακά συνεκτική.

(4) $S: x^2+y^2-z^2=-r^2$



Απόδ Θεωρήματος (ΧΑ):

Θεωρώ $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in f^{-1}(a)$. Λόγω υπόθεσης

$(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)) \neq (0,0,0)$

Υποθέτω ότι $f_z(P_0)\neq 0$. Ορίζω $F: U \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z)=(x,y,f(x,y,z))$

Ο Ιακωβιανός πίνακας της F στο P_0 είναι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x(P_0) & f_y(P_0) & f_z(P_0) \end{bmatrix}$$

$$\det dF_{P_0} = f_z(P_0) \neq 0$$

$$F(x,y,z)=(u,v,t) \underset{\text{αντιστροφης}}{\overset{\text{θεώρημα}}{\iff}} (x,y,z)=(u,v,t)$$

$$\begin{cases} x=u \\ y=v \\ f(x,y,z)=t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=g(u,v,t) \end{cases}$$

Τώρα $V\cap f^{-1}(a)=a$

$$(x,y,z)=(u,v,\underbrace{g(u,v,a)}_{h(u,v)})$$